

فمراجعة لبعض الأمور السابقة في نظرية الاحتمالات

- لقد عرفنا بالفعل الأخير في مقرر نظرية الاحتمالات على كيفية إيجاد التوزيع الاحتمالي لمغير عشوائي تابع لمغير عشوائي معلوم وذلك في الحالتين عندما يكون المغير الأساسي منقطع أو مستمر.

وآخذنا أمثلة في حالة متغير منقطع وفي حالة متغير مستمر

مثلاً في حالة المتغير المستمر

إذا كان $X \sim (\mu, \sigma^2)$ وسأنت $Y = e^X$ عندئذ لنوجد $f_Y(y)$

$$f_Y(y) = f_X(x) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right|_{x = \ln y}$$

$$= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left| \frac{dx}{dy} \right|_{x = \ln y}$$

$$= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{y} \quad y > 0$$

ونذكر ونذكر هذه الدالة بدالة متغير عشوائي لوغاريتمية

$$W_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

$$E Y = E e^X = M_X(1) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

$$E Y^2 = E e^{2X} = M_X(2) = e^{2\mu + 2\sigma^2}$$

$$W(Y) = E Y^2 - (E Y)^2$$

$$E \ln Y = E X = \mu$$

$$V(\ln Y) = V(X) = \sigma^2$$

أما في حالة X متغير منقطع وليكن متغيراً عشوائياً ثنائياً p, q و $Y = X^2$ عندئذ لإيجاد التوزيع الاحتمال $Y = X^2$ وجدنا أن

$$P_X(y) = P_X(W(u))$$

$$= P_X(\sqrt{y})$$

$$= C_n^k p^k q^{n-k} \quad \text{و } y = 0, 1, 4, 9, \dots, n^2$$

$$X = X^2$$

$$X = \pm \sqrt{y}$$

أما الآن سوف نتعرف على كيفية إيجاد التوزيع الاحتمالي المستمر لمغيرين

عنوانين تابعين لمغيرين عشوائيين آخرين لتوزيع احتمالي مشترك
 سوف نركز الدراسة في هذه الفقرة على المغيرين العشوائيين المستمرين
 بفرض X, Y متغيران عشوائيان لهما دالة كثافة احتمالية مشتركة

$$f(x, y)$$

$$x = \varphi_1(u, v)$$

$$y = \varphi_2(u, v)$$

$$u = \varphi(x, y) \quad \text{دبني}$$

$$v = \psi(x, y)$$

موجودة

لحيت $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$ عند تب دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لـ x, y وتعين بالعلاقة

$$g(u, v) = f(x, y) \quad | \quad \begin{cases} x = \varphi_1(u, v) \\ y = \varphi_2(u, v) \end{cases}$$

$$y = \varphi_2(u, v)$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

ملاحظة:

$$f(x, y) = f(x) \cdot f(y)$$

X, Y مستقلان جان

مثال:

فرض X, Y متغيران عشوائيان متفران لهما الدالة الاحتمالية المشتركة

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{(x+y)^2}{2}}$$

ولكن $u = x + y$ و $v = \frac{x}{y}$ والمطلوب:

ايجاد دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين

الحل:

لدينا من ② $x = uy$ وبالتاي لنومن في ① نجد ان

$$u = uy + y \Rightarrow u = (u+1)y \Rightarrow y = \frac{u}{u+1}$$

$$x = \frac{u \cdot u}{u+1}$$

نومن y في ③ لتجد ان

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{u}{u+1}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{u(u+1) - (u+1)}{(u+1)^2} = \frac{u}{(u+1)^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{k+1}$$

$$f \quad \frac{\partial y}{\partial k} = \frac{u}{(1+k)^2}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{k}{k+1} & \frac{u}{(k+1)^2} \\ \frac{1}{k+1} & -\frac{u}{(k+1)^2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{uk}{(k+1)^2} - \frac{u}{(k+1)} = -u \frac{1+k}{(k+1)^2} = -\frac{u}{(k+1)} \Rightarrow$$

$$|J| = \frac{u}{(1+k)^2}$$

وبالتالي:

$$g(u, k) = \frac{1}{u} e^{-\frac{(x+y)}{2}} \cdot |J| \quad x = \frac{1}{u} e^{-\frac{u}{k+1}} \quad y = \frac{u}{k+1}$$

وهنا يمكن أن نرى أن u, k متغيرين عشوائيين مستقلين

$$\sum g(u, k) = \frac{1}{u} \cdot e^{-\frac{u}{k+1}} \cdot \frac{1}{(k+1)^2}$$

وبعد حصة أن

$$= g_u(u) \cdot g_k(k)$$

u يتخذ مقياس عشوائي غاوسي الأول $\lambda=2$ f الثاني $\lambda=\frac{1}{2}$

$$g_k(k) = \frac{1}{(1+k)^2} \quad k > 0$$

$$\int_0^{\infty} \frac{k}{(1+k)^2} = \left[-\frac{1}{1+k} \right]_0^{\infty} = 1$$

أي أن u, k متغيران عشوائيان مستقلان لأنه استطعنا كتابة دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة على شكل دالة واحدة لـ u وسانح نحاول كتابة دالة لـ k وحده

صنعت هذا الشرط لكي أن نرى أن u, k متغيرين عشوائيين مستقلين من الدالة المولدة لمجموعة المتفرقة البنية:

$$M \sum_{i=1}^n u_i(t) = (M u(t))^n = [(1-2t)^{-2}]^n$$

$$= (1-2t)^{-2n} = (1-2t)^{-4n}$$

ملاحظة:

اعتماداً على القاعدة السابقة لأيجاد دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لمتغيرين عشوائيين معدودة سامة

ليكن ايجاد دالة كثافة احتمالية لأحد المتغيرين وليكن u وذلك باخذ متغير مساعد ومن ثم توجد دالة كثافة احتمالية مشتركة لمتغيرين مستقلين بدلالة الأساسيين وهنا t توجد دالة الكثافة الهامشية للمتغير المطلوب وسيل المثال:

نفرض لدينا متغير عشوائي طبيعي عياري أي أن x من النقط $N(0,1)$

$$x \sim N(0,1)$$

$$x \sim x^2(n)$$

حيث x و y متغيران عشوائيان مستقلان عندئذ المتغير t يدعى متغير عشوائي ستودنت وسيلا (n) بدرجة الحرية (n)

$$t = \frac{x}{\sqrt{\frac{y}{n}}} \sim t(n)$$

الآن لتوجد دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير لأيجاد دالة كثافة له دالة المتغير t

سوف نأخذ متغير مساعد وليكن $[z=y]$ ومن ثم لتوجد دالة كثافة احتمالية المشتركة لـ t, z بالقاعدة السابقة وبهذا توجد دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية فنحصل على المطلوب.

$$g(t, z) = f(x, y) \quad |J| \quad x = t \frac{\sqrt{z}}{n}$$

$$y = z$$

$$= f_x(x) \cdot f_y(y) \quad |J| \quad x = t \frac{\sqrt{z}}{n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{z^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} y^{t-1} \cdot e^{-\frac{y}{z}}$$

$$g(t, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{z^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{t^2 z}{2n}} \cdot z^{t-1} \cdot e^{-\frac{z}{z}} \cdot \frac{z^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{1}{z^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{t^2 z}{2n}} (1 + \frac{t^2}{n}) \quad t \in \mathbb{R} \quad z > 0$$

$$g_+(t) = \int_0^{\infty} g(t, z) dz$$

ومن ثم

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{\infty} \frac{(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}) - 1}{z} \cdot e^{-\frac{z}{2}(1 + \frac{t^2}{n})} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{\infty} \frac{2^{\frac{n+1}{2}-1} u^{\frac{n+1}{2}-1}}{(1 + \frac{t^2}{n}) \frac{n+1}{2} - 1} \cdot e^{-u} \cdot \frac{2 du}{(1 + \frac{t^2}{n})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{(1 + \frac{t^2}{n})^{\frac{n+1}{2}}} \left(\int_0^{\infty} u^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-u} du \right) \rightarrow \Gamma(\frac{n+1}{2})$$